Revista de Sistemas de Informação da FSMA
n. 11 (2013) pp. 11-16

SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
http://www.fsma.edu.br/si/sistemas.html

TRILHA PRINCIPAL

# Malhas móveis para solução numérica de equações diferenciais parciais

Frederico S de Oliveira[1], Sanderson L. Gonzaga de Oliveira[1], Mauricio Kischinhevsky[2] e João Manuel R. S. Tavares[3]

[1] - Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brasil; [2] - Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil; [3] - Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal

***Resumo***. Neste trabalho, abordam-se malhas móveis para a resolução numérica de equações diferenciais parciais. Conceitos importantes neste contexto são descritos, bem como são indicados trabalhos existentes para a solução de equações diferenciais parciais pelos métodos dos volumes finitos e dos elementos finitos ambos com malhas móveis.

***Palavras-chave* — geração de malhas, refinamento adaptativo de malhas, malhas móveis.**

## I. Introdução

Em geral, o desenvolvimento de sistemas em engenharia requer o uso de ferramentas CAD (*computer-aided design*). Nessas ferramentas, técnicas de simulação computacionais são frequentemente utilizadas para modelar e investigar fenômenos físicos em diversas áreas das ciências. Conforme apresentado por Budd, Huang e Russell (2009), exemplos desses fenômenos ocorrem em diversas aplicações, como na dinâmica de fluidos e gases, leis conservativas, ótica não-linear, combustão, detonação, modelos de previsão meteorológica, estudo da poluição nos oceanos, rios e atmosfera, modelos de termodinâmica, de eletromagnetismo, de aerodinâmica e na prospecção e extração de petróleo. Geralmente, esses fenômenos são modelados por equações diferenciais parciais (EDPs); como exemplo, em Liu (2003), abordam-se diversos problemas relacionados à área de mecânica dos sólidos, estruturas, fluxo de fluidos e dos modelos matemáticos dos fenômenos.

É comum que técnicas de simulação computacional sejam utilizadas para se investigar esses fenômenos. Geralmente, a simulação numérica de fenômenos físicos envolve duas partes principais: a modelagem matemática que descreve o fenômeno de interesse e a implementação de técnicas numéricas para que a modelagem matemática seja resolvida computacionalmente.

Uma maneira de se encontrar uma solução aproximada de equações diferenciais parciais pode ser utilizando-se um método numérico de discretização. Entre os diversos métodos de discretização, podem ser citados o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos. Nesses métodos, resolvem-se equações diferenciais ao se substituir os termos por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Ao se realizar essa aproximação numérica, a solução é obtida para um número discreto de pontos, com um determinado erro, proveniente da aproximação. Se o método for convergente, a solução numérica será mais próxima da solução exata quanto maior for o número de pontos. Pode-se considerar essa *malha* de pontos e suas ligações como o domínio discretizado geometricamente.

A modelagem de fenômenos pode ser realizada por equações diferenciais parciais que, em muitas vezes, a solução possui variações grandes em pequenas regiões do domínio em estudo. Com o intuito de diminuir o erro nessas regiões de grande variação, refina-se a malha. A utilização de uma malha fina e uniforme ao longo de todo o domínio acarreta um custo computacional alto, aumentando excessivamente o número de pontos, inclusive em regiões onde não é necessário tal nível de refinamento. Uma alternativa possível é posicionar uma quantidade grande dos pontos da malha nas regiões de grande variação da solução e poucos pontos em regiões do domínio onde ocorrem poucas variações. Com esse *refinamento adaptativo*, o número total de pontos é muito menor do que utilizar uma malha uniforme, havendo uma economia do custo computacional. Entretanto, como explica Huang e Russell (2011), o refinamento adaptativo não deve ser visto como uma panaceia. Para problemas com variações suaves na solução, é preferível utilizar uma malha uniforme em vez de uma não-uniforme pois, utilizando-se uma malha uniforme, é possível obter uma solução tão eficiente quanto uma malha não-uniforme.

Segundo Olivier e Alauzet (2011), nas últimas décadas, o uso da simulação numérica tem obtido um papel importante na ciência e nas engenharias devido ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e à grande capacidade de armazenamento dos sistemas de computação. Esses avanços têm permitido que as simulações obtenham bons resultados em relação à precisão e a desempenho. Atingir esses níveis de resultado significa resolver equações diferenciais complexas que modelam problemas físicos complexos e tentar minimizar os erros inerentes da aproximação numérica. Realizar o refinamento da malha é uma forma de se minimizar esses erros inerentes da aproximação numérica. Mesmo com o refinamento adaptativo, a inclusão de novos pontos faz com que haja mais esforço computacional na resolução do problema, em relação à iteração anterior, com menos pontos. Com isso, para sistemas em que a dimensão é relevante, as técnicas utilizadas têm que ser suficientemente eficientes, de modo que possibilitem resultados precisos, com custo computacional baixo.

Foram desenvolvidas diversas técnicas de adaptatividade de malhas em relação a refinamento adaptativo, que passa pela inclusão de novos pontos, e malhas móveis, que é baseada no movimento dos pontos da malha inicial. Como já descrito, nas técnicas de adaptatividade por refinamento, são inseridos novos pontos na malha nas regiões de erro grande ou de gradiente grande da solução. Nas técnicas de adaptatividade com movimento de pontos, a quantidade original de pontos é mantida, ocorrendo o movimento de pontos para as regiões de maior variação na solução. Manter a quantidade de pontos na malha é benéfico, pois a inclusão de pontos aumenta o custo computacional para a resolução do problema, como já descrito. Neste texto, há uma descrição sobre adaptatividade de malhas para os casos em que a sua aplicação é necessária e o foco é em malhas móveis.

A seguir, na seção II, apresentam-se conceitos importantes na geração de malhas. Na seção III, descrevem-se alguns trabalhos sobre malhas móveis e, na seção IV, as considerações finais são apresentadas.

## II. Alguns conceitos importantes na geração de malhas

Nesse contexto, a abordagem de adaptatividade para a resolução de equações diferenciais parciais pode ser dividida em três categorias: abordagem *h* de refinamento, abordagem *p* de refinamento e abordagem *r* de refinamento. Na abordagem *h* de refinamento, inicia-se a simulação com uma malha inicial e essa malha é refinada ou simplificada por meio da inclusão ou da remoção de pontos. Geralmente, a estratégia utilizada na inclusão ou na remoção dos pontos é orientada por uma estimativa *a posteriori* de erro da solução. Isso é chamado, geralmente, de refinamento adaptativo de malhas por usuários do método dos volumes finitos. Na abordagem *p* de refinamento, Budd, Huang e Russell (2009) explicam que se utiliza uma discretização de EDPs por elementos finitos com *polinômios* de uma ordem particular. Essa ordem é incrementada ou decrementada de acordo com os erros da solução. Pode-se combinar essa abordagem com o refinamento *h* para se utilizar uma estimativa *a posteriori* de erro da solução. Com essa combinação, tem-se a subcategoria de refinamento *hp*, cujo objetivo é a obtenção da solução dentro de um erro prescrito limitado pelos procedimentos de refinamento (BUDD; HUANG; RUSSELL, 2009).

No refinamento *r*, o número de pontos da malha é fixo e esses pontos são movidos de forma que sejam concentrados nas regiões de grande variação da solução em função do tempo. Na comunidade de volumes finitos, são chamados, geralmente, de malhas móveis. Segundo Eleftheriou (2011), essa abordagem de refinamento pode ser, em geral, utilizada para problemas transientes por causa da mobilidade da malha, que facilita lidar com integradores de tempo. Entretanto, sua limitação está na dificuldade em definir um intervalo de tempo adequado, uma vez que os nós variam de posição ao longo do tempo, podendo ocorrer o entrelaçamento de arestas. Ainda, a aplicabilidade da adaptatividade *r* é limitada devido ao número fixo de graus de liberdade e a uma conectividade constante dos polígonos da malha. Com isso, a adaptatividade *r* é, tipicamente, utilizada para acelerar o processo computacional em vez de ser utilizada para se alcançar uma precisão prescrita. Ver Askes (2000), para detalhes sobre esse assunto.

Como afirmam Huang e Russell (2011), os métodos que utilizam malhas móveis, ou simplesmente, métodos de malhas móveis, ainda estão em uma fase relativamente inicial de desenvolvimento. Muitos deles estão em estágio experimental e, quase todos, requerem uma justificativa matemática adicional. Como também explicam Huang e Russell (2011), uma análise rigorosa dos métodos de malhas móveis, para resolver EDPs dependentes do tempo, só foi realizada para alguns modelos muito simples de problemas e afirmam que muitas formas de se melhorar sua eficiência e robustez serão, sem dúvida, desenvolvidos. Como, por exemplo, ainda são necessários mais estudos numéricos sistemáticos de como se reduzir os custos na resolução de todo um sistema de malha e EDPs, bem como estudos em como se equilibrar a adaptação espacial e temporal de uma malha.

Huang e Russel (2011) explicam, também, que um fator importante nos métodos de malhas móveis está na escolha adequada de uma função de densidade da malha. Essa função controla a concentração de pontos da malha por meio do princípio de equidistribuição e, tipicamente, mensura a dificuldade na aproximação numérica espacial do problema sendo resolvido. De acordo com Huang e Russell (2011), a seleção da função de densidade da malha pode ser baseada na estimativa de erro de interpolação, na invariância de escala ou em uma estimativa de erro *a posteriori*, com o limite ótimo para o erro de interpolação ou o erro da solução, também obtido pela malha equidistribuída correspondente.

O princípio de equidistribuição foi originalmente introduzido por Boor (1973). Com esse princípio, busca-se rearranjar os nós de uma malha de forma que uma determinada medida seja distribuída equitativamente ao longo de cada subintervalo da malha. Essa medida pode ser, por exemplo, uma medida de erro que será comparada com a medida de um elemento desejável, hipoteticamente ótimo. A diferença entre cada elemento da malha e o elemento desejável será, aproximadamente, a mesma para todos os elementos existentes. De acordo com Askes (2000), algumas restrições topológicas, como cantos não convexos em problemas multidimensionais, podem impedir um movimento de pontos ideal, por isso, não se pode garantir que a equidistribuição seja satisfeita para todos os elementos da malha. Admite-se que a posição dos nós $x_i$ , para $i=1..N$ , em que $N$ é o número de nós, seja definida de forma a garantir que uma medida, denominada de função peso ou função monitora $M(x)$ , seja distribuída equitativamente em todo o domínio. Essa distribuição é feita conforme $\int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x)\,dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x)\,dx\,, 2 \leq i \leq N-1$ , que no formato discreto, é aproximada por

$$M_{i-1}\Delta x_{i-1}=M_i\Delta x_i\,, 2\leq i\leq N-1, \qquad (1)$$

em que $\Delta x_{i-1}=x_i-x_{i-1}$ é o tamanho local da malha e $M_{i-1}$ representa a estimativa discreta de $M(x)$ no intervalo $\left[x_{i-1},x_i\right]$ .

Dentre as primeiras aplicações do princípio de equidistribuição, estão os trabalhos de Dwyer, Sanders e Kee (1979), Dwyer, Raiszadeh e Otey (1981), Gnoffo (1980) e White (1982), que o aplicaram para resolver problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor em uma dimensão. White (1982) recorreu ao comprimento do arco da solução como função monitora,

$$M(u)=\sqrt{1+|u'|^2}. \qquad (2)$$

Considere-se um exemplo para ilustrar a ideia principal do princípio de equidistribuição. Seja $f(x)=\tanh\left(\frac{1-x}{0,1}\right)$. Considere-se ainda um subconjunto no intervalo $[0,1]$ . Suponha-se agora que $x_0<x_1<\ldots<x_n$ , em que $x_0=0$ e $x_n=1$ . Neste contexto, no gráfico à esquerda da figura (1), a malha é dividida uniformemente, podendo-se observar a malha adaptativa gerada pelo princípio de equidistribuição no gráfico à direita da figura (1). Nesse caso, a função monitora foi baseada no comprimento do arco, expressa por (2) e os pontos são distribuídos igualmente na curva da solução satisfazendo (1). Exemplos similares podem ser encontrados em Zegeling (1996), Li, Tang e Zhang (2000) e Tan (2005).

Em diversos trabalhos (ver, por exemplo, Huang e Russell (2011) e suas referências), o princípio de equidistribuição (BOOR, 1973) desempenha um papel fundamental no projeto de estratégias de movimento da malha para o caso unidimensional. Claramente, a situação da adaptatividade em multidimensões é muito mais complicada do que em uma dimensão. Huang e Russell (2011) explicam que o princípio de equidistribuição, ao especificar apenas o volume dos elementos da malha, não é completo o suficiente para determinar uma malha multidimensional. Uma condição de alinhamento adicional é necessária para se especificar a forma e a orientação dos elementos da malha. Huang e Russell (2011) apresentam os princípios básicos de adaptatividade de malhas multidimensionais, inclusive, a condição de alinhamento necessária.

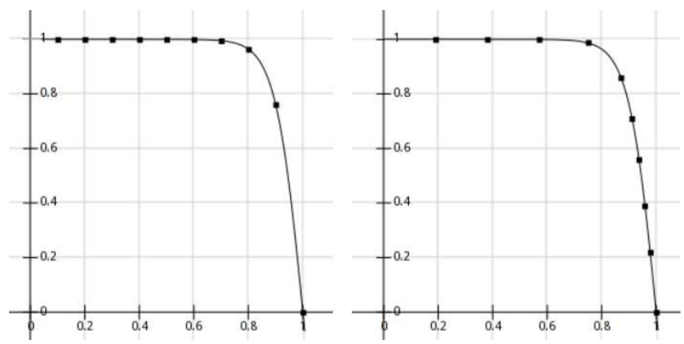


*Figura 1: Comparação entre o princípio de equidistribuição utilizando o comprimento do arco (à direita) e uma malha dividida uniformemente (à esquerda) com 10 pontos. Exemplo adaptado de Tan (2005).*

Em malhas multidimensionais, a adaptatividade é guiada por uma função monitora dependente da solução, isto é, uma função matriz simétrica positiva-definida relacionada naturalmente a uma função de densidade de malhas em uma dimensão. Veja, também, Huang e Russell (2011), para detalhes sobre esse assunto. A função monitora define uma métrica no domínio físico. Segundo Marlow (2010), a ideia da função monitora é converter o conceito vago de se "mover os pontos da malha para onde a atividade é maior" em um procedimento matemático sólido ou, no mínimo, em algo que possa ser numericamente quantificado. Segundo Huang e Russell (2011), considera-se que a função monitora é sempre não-negativa.

A adaptatividade multidimensional de uma malha, de acordo com Huang e Russell (2011), pode ser entendida como uma técnica para gerar uma malha uniforme em um determinado espaço métrico. Especifica-se, por meio dessa técnica, o tamanho, a forma e a orientação os elementos da malha. Essa técnica fornece um controle natural da equidistribuição e do alinhamento, com o papel de assegurar que a malha esteja devidamente alinhada com o comportamento da solução física. Huang e Russell (2011) analisam e relacionam à qualidade da malha na forma de precisão matemática essa equidistribuição e à condição de alinhamento. Esses autores apresentam interpretações nas perspectivas discreta, por intermédio de malhas, e contínua, usando transformação de coordenadas.

Segundo Huang e Russell (2011), o problema de se computar soluções de EDPs, utilizando-se métodos de malhas móveis pode ser separado nos três problemas descritos a seguir.

- Uma função de densidade da malha, também chamada de função monitora, é necessária para guiar a redistribuição dos pontos da malha na evolução da EDP. Essa função monitora, normalmente, é restrita tanto para equidistribuir esse movimento dos pontos, quanto para se obter um relaxamento da malha na busca de um estado equidistribuído. A escolha da função monitora pode depender do comprimento de arco da solução em problemas unidimensionais, na curvatura da solução e em erros *a posteriori*.

- Determinada a função monitora, deve-se verificar uma malha que se equidistribui de alguma maneira. O problema da equidistribuição em si é um problema algébrico não linear.
- A EDP é, então, discretizada, tanto no domínio computacional da malha quanto no domínio físico original e, geralmente, elementos finitos ou volumes finitos são empregados.

Na prática, qualquer que seja a escolha da função monitora, alguma suavização ou relaxação espacial e temporal é empregada, com o intuito de se melhorar a qualidade da malha, diminuindo-se a distorção dos elementos. Veja Huang e Russell (2011), para explicações sobre como se escolher uma função monitora ótima para um determinado limite de interpolação de erro ou uma estimativa de erro *a posteriori* e uma função monitora baseada sobre outra consideração física e geométrica. Uma função monitora baseada em erro de interpolação pode ser obtida por meio da aproximação polinomial de Taylor, para uma dimensão, e pela aproximação em espaços de Sobolev, para multidimensões.

Muitas funções monitoras envolvem derivadas da solução e, para o cálculo dessas derivadas, são realizadas aproximações. Dessa forma é definida uma função monitora *a posteriori.*

Segundo Huang e Russell (2011), funções monitoras baseadas em considerações físicas ou geométricas levam em conta a distância, ou a área, entre as interfaces, ou podem utilizar uma malha como parâmetro, adaptando a nova malha para se tornar o mais próximo possível da malha de referência. O tratamento do erro de interpolação nos espaços gerais de Sobolev, em malhas isotrópicas e anisotrópicas, fornece um resultado que evidencia como a escolha da função monitora ótima leva a um erro delimitado por uma solução ótima. Esse erro depende de um fator, cuja ordem é de $1/n$ , em que $n$ é o número de elementos da malha (HUANG; RUSSELL, 2011).

Os limites de erro de interpolação com funções monitoras não ótimas e as funções monitoras ótimas para um limite de erro *a posteriori* também são abordados por Huang e Russell (2011). Além disso, vários aspectos práticos da computação de funções monitoras são apresentados por Huang e Russell (2011).

Em Huang e Russell (2011), diversas EDPs de malhas móveis (*moving mesh partial differential equations*, MMPDEs) são apresentadas para problemas dependentes do tempo. Também, são desenvolvidas diversas equações de malhas para problemas de estado estacionário ao se utilizar a equidistribuição. MMPDEs são formas contínuas das estratégias de movimentos de malhas formuladas em termos de transformações de coordenadas. Ainda nessa obra, são abordadas questões práticas de implementação, incluindo a discretização de equações de malhas, EDPs físicas e do procedimento da solução global.

Huang e Russell (2011) abordam também as questões de adaptatividade de malhas no contexto multidimensional, que é um assunto consideravelmente desafiador. Para dimensões espaciais altas, necessita-se de ferramentas de cálculo avançado para transformar EDPs entre o espaço físico e o espaço computacional.

## III. Trabalhos com malhas móveis

Já foi desenvolvida e aplicada uma grande variedade de métodos de malhas móveis, de uma e duas dimensões, na resolução de diversos problemas, conforme pode-se verificar, por exemplo, em Tang (2005), em que há revisão de técnicas em malhas móveis de suas aplicações na dinâmica de fluidos computacional. A seguir, alguns trabalhos com malhas móveis são indicados.

Cao, Huang e Russell (2001) realizaram um estudo de vários indicadores de erros para o método dos elementos finitos. Este autores analisaram os indicadores de erros baseados no gradiente da solução, nos erros de interpolação e em estimativas de erros *a posteriori* para uso na definição da função monitora. Huang (2001) introduziu os conceitos de balanço espacial e invariância de escala e estudou como construir EDPs com malhas móveis com algumas propriedades desejadas.

Huang e Sun (2003) utilizaram a teoria de interpolação de métodos de elementos finitos para estimar erros. Liu e Shen (2003) propuseram um método espectral de Fourier para tratar um problema de campo de fases para a mistura de dois fluidos incompressíveis.

Zegeling (2004) discutiu um método de malha adaptativa baseada numa abordagem produto-tensorial. Zegeling (2005) descreveu uma técnica de malha móvel adaptativa e sua aplicação em modelos de convecção-difusão magneto-hidrodinâmicos.

Liu, Qin e Xia (2006) propuseram uma técnica simples e eficiente de deformação dinâmica de malha para calcular problemas de fluxo instável, com deformação geométrica, movimento relativo de corpos ou variações na forma devido à otimização aerodinâmica e à interação entre o fluido e a estrutura.

Tan (2007) aplicou uma técnica de malhas móveis adaptativas, com malhas quadrangulares, para a resolução de problemas magneto-hidrodinâmicos. Tan, Lim e Khoo (2007) desenvolveram um método de malhas adaptativas para resolver um modelo de campo de fases para o fluxo da mistura de dois fluidos incompressíveis, utilizando malhas quadrangulares e as equações de Navier-Stokes e Allen-Cahn.

Marlow (2010, 2011), descreveu um método adaptativo para resolver EDPs parabólicas não-lineares com fronteiras móveis, utilizando malhas móveis com elementos finitos contínuos. McNally, Lyra e Passy (2012) realizaram uma comparação de resultados de diferentes códigos para a solução do problema de instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Diversos estudos, como exemplos, Mackenzie (1996), Dam e Zegeling (2006), Tan et al. (2004), Tan, Tang e Zhang (2006), Springel (2005, 2009, 2011), envolvendo a discretização por volumes finitos, utilizaram malhas móveis para a resolução de EDPs. Grande parte dessas pesquisas foi para a solução de fenômenos com esforço computacional relativamente baixo e alta precisão na aproximação, de modo a construir malhas adaptáveis para a solução do fenômeno envolvido.

Ainda, vários outros métodos, especialmente multidimensionais, têm sido desenvolvidos e utilizados com sucesso. Como exemplos, ver, Beni, Mostafavi e Pouliot (2008), Greif et al. (2011), Heß e Springel (2010, 2012), Pakmor, Bauer e Springel (2011) e Muñoz et al. (2012).

## IV. Considerações finais

Neste texto, malhas móveis foram introduzidas e diferentes tipos de adaptatividade de malhas foram abordados, com ênfase nos métodos de malhas móveis. Também foi descrito o princípio de equidistribuição, com apresentação de um exemplo unidimensional. Por fim, foram citados trabalhos sobre malhas móveis desenvolvidos recentemente.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com os apoios do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig). Agradece-se também ao editor e ao revisor da Revista de Sistemas de Informação da FSMA pelos comentários e sugestões para a melhoria deste texto.

## Referências

1. ASKES, H. Advanced Spatial Discretisation Strategies for Localised Failure. Mesh Adaptivity and Meshless Methods. Tese (PhD thesis) — Technische Universiteit Delft, Delft – Nederlands, may 2000. Disponível em: <http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid%3A1f6cd5e6-08ad-4f0f-ba40-ea51ee0f4c16/>. Acesso em: 23/04/2013.
2. BENI, L. H.; MOSTAFAVI, M. A.; POULIOT, J. Dynamic field process simulation within gis: the voronoi approche. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Department of Geomatics, Laval University, Quebec, Canada, v. 37, p. 891–898, 2008. Disponível em: <http://www.isprs.org/proceedings/XXXVII/congress/2_pdf/8_ICWG-II-IV/01.pdf>. Acesso em: 23/04/2013.
3. BOOR, C. de. Good approximation by splines with variables knots II. Springer Lecture Notes Series, Springer-Verlag, Berlin, v. 363, 1973. Disponível em: <ftp://ftp.cs.wisc.edu/Approx/goodappr.pdf>. Acesso em: 30/04/2013.
4. BUDD, C. J.; HUANG, W.; RUSSELL, R. D. Adaptivity with moving grids. Acta Numerica, v. 18, p. 111–241, 2009.
5. CAO, W.; HUANG, W.; RUSSELL, R. D. Comparison of two-dimensional r-adaptive finite element methods using various error indicators. Mathematics and Computers in Simulation, v. 56, n. 2, p. 127–143, 2001. ISSN 0378-4754. <ce:title>Method of lines</ce:title>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475401002853>. Acesso em: 23/04/2013.
6. DAM, A. van; ZEGELING, P. A. A robust moving mesh finite volume method applied to 1D hyperbolic conservation laws from magnetohydrodynamics. Journal of Computational Physics, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 216, n. 2, p. 526–546, August 2006. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.12.014>. Acesso em: 23/04/2013.
7. DWYER, H.; RAISZADEH, F.; OTEY, G. A study of reactive diffusion problems with stiff integrators and adaptive grids. In: REYNOLDS, W.; MACCORMACK, R. (Ed.). Seventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Springer Berlin Heidelberg, 1981, (Lecture Notes in Physics, v. 141). p. 170–175. ISBN 978-3-540-10694-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-10694-4_24 >.
8. DWYER, H.; SANDERS, B.; KEE, R. An adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer. In: . Williamsburg, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1979. p. 195–203. Disponível em: <http://opac.inria.fr/record=b1070874>.
9. ELEFTHERIOU, T. Moving Mesh Methods using monitor functions for the Porous Medium Equation. Tese (PhD em Matemática) — University of Reading, 2011.
10. GNOFFO, P. Complete supersonic flowfields over blunt bodies in a generalized orthogonal coordinate system. American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 18, n. 6, p. 611–612, 1980.
11. GREIF, T. H.; SPRINGEL, V.; WHITE, S. D. M.; GLOVER, S. C. O.; CLARK, P. C.; SMITH, R. J.; KLESSEN, R. S.; BROMM, V. Simulations on a moving mesh: The clustered formation of population III protostars. The Astrophysical Journal, v. 737, n. 2, p. 75, 2011. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0004-637X/737/i=2/a=75>. Acesso em: 23/04/2013.
12. Heß, S.; Springel, V. Particle hydrodynamics with tessellation techniques. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 406, p. 2289–2311, August 2010. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010MNRAS.406.2289H>. Acesso em: 23/04/2013.
13. Heß, S.; SPRINGEL, V. Gas stripping and mixing in galaxy clusters: A numerical comparison study. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 426, p. 3112–3134, November 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1208.0351>. Acesso em: 23/04/2013.
14. HUANG, W. Practical aspects of formulation and solution of moving mesh partial differential equations. Journal of Computational Physics, v. 171, n. 2, p. 753–775, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999101968093>. Acesso em: 23/04/2013.
15. HUANG, W.; RUSSELL, R. D. Adaptive moving mesh methods. New York: Springer, 2011. (Applied mathematical sciences). ISBN 978-1-4419-7915-5.
16. HUANG, W.; SUN, W. Variational mesh adaptation II: error estimates and monitor functions. Journal of Computational Physics, v. 184, n. 2,

p. 619–648, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999102000402>. Acesso em: 23/04/2013.

17. LI, R.; TANG, T.; ZHANG, P. Moving mesh methods in multiple dimensions based on harmonic maps. Journal of Computational Physics, v. 170, p. 562–588, 2000. Disponível em: <http://www.math.hkbu.edu.hk/~ttang/moving.html>. Acesso em: 23/04/2013.

18. LIU, C.; SHEN, J. A phase field model for the mixture of two incompressible fluids and its approximation by a fourier-spectral method. Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 179, n. 3-4, p. 211–228, 2003. ISSN 0167-2789. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278903000307> .

19. LIU, G.-R. Mesh free methods: moving beyond the finite element method. First edition. New York: CRC Press, 2003. ISBN 0-8493-1238-8.

20. LIU, X.; QIN, N.; XIA, H. Fast dynamic grid deformation based on delaunay graph mapping. Journal of Computational Physics, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 211, n. 2, p. 405–423, jan. 2006. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.05.025>. Acesso em: 23/04/2013.

21. MACKENZIE, J. Moving Mesh Finite Volume Methods for One-Dimensional Evolutionary Partial Differential Equations. 1996.

22. MCNALLY, C. P.; LYRA, W.; PASSY, J.-C. A well-posed Kelvin-Helmholtz instability test and comparison. The Astrophysical Journal Supplement Series, v. 201, n. 2, p. 18, ago. 2012. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012ApJS..201...18M>. Acesso em: 23/04/2013.

23. MARLOW, R. Moving mesh methods for solving parabolic partial differential equations. Tese (PhD School of Computing) — Universit of Leeds, 2010.

24. MARLOW, R. Moving mesh methods for solving parabolic partial differential equations. 10th Conference Series on Numerical Methods for Fluid Dynamics, School of Computing, Leeds, v. 46, n. 1, p. 353–361, July 2011.

25. MUÑOZ, D.; SPRINGEL, V.; MARCUS, R.; VOGELSBERGER, M.; HERNQUIST, L. Multi-Dimensional, Compressible Viscous Flow on a Moving Voronoi Mesh. 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1203.1037>. Acesso em: 17/4/2013.

26. OLIVIER, G.; ALAUZET, F. A new changing-topology ale scheme for moving mesh unsteady simulations. In: Proceedings of 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Gamma Project, INRIA Rocquencourt, 78 153 Le Chesnay, France: AIAA, 2011. (AIAA-2011-0474), p. 1–25. Disponível em: <https://www.rocq.inria.fr/gamma/gamma/Membres/CIPD/Frederic.Alauzet>. Acesso em: 23/04/2013.

27. PAKMOR, R.; BAUER, A.; SPRINGEL, V. Magnetohydrodynamics on an unstructured moving grid. Institut für Theoretische Studien - Heidelberg, Germany, v. 418, n. ArXiv:1108.1792, p. 1392–1401, December 2011. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1108.1792>. Acesso em: 23/04/2013.

28. SPRINGEL, V. The cosmological simulation code GADGET-2. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 364, p. 1105–1134, dez. 2005. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005MNRAS.364.1105S>. Acesso em: 23/04/2013.

29. SPRINGEL, V. E pur si muove: Galiliean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Max-Planck-Institute for Astrophysics, v. 401, p. 791–851, October 2009. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0901.4107 >. Acesso em: 18/04/2013.

30. SPRINGEL, V. Hydrodynamic simulations on a moving Voronoi mesh. Garching, September 2011. v. 1109.2218, n. arXiv:1109.2218, 35 p. Comments: 35 pages, 10 figures; invited review for the volume Tessellations in the Sciences: Virtues, Techniques and Applications of Geometric Tilings, Springer (accepted). Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1109.2218>. Acesso em: 23/04/2013.

31. TAN, Z. Moving Mesh Finite Volume Method and its Applications. Tese (Doutorado) — Hong Kong Baptist University, 2005.

32. TAN, Z. Adaptive moving mesh methods for two-dimensional resistive magneto-hydrodynamic PDE models. Computers & Fluids, v. 36, n. 4, p. 758 – 771, 2007. ISSN 0045-7930. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793006000831 >. Acesso em: 23/04/2013.

33. TAN, Z.; LIM, K. M.; KHOO, B. C. An adaptive mesh redistribution method for the incompressible mixture flows using phase-field model. Journal of Computational Physics, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 225, n. 1, p. 1137–1158, July 2007. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2007.01.019>. Acesso em: 23/04/2013.

34. TAN, Z.; TANG, T.; ZHANG, Z. A simple moving mesh method for one-and two-dimensional phase-field equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, v. 190, n. 1, p. 252–269, jun. 2006. ISSN 0377-0427. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.01.042>. Acesso em: 23/04/2013.

35. TAN, Z.; ZHANG, Z.; HUANG, Y.; TANG, T. Moving mesh methods with locally varying time steps. Journal of Computational Physics, v. 200, n. 1, p. 347–367, 2004. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104001706>. Acesso em: 23/04/2013.

36. TANG, T. Moving Mesh Methods for Computational Fluid Dynamics. Hong Kong: Department of Mathematics, Hong Kong Baptist University, 2005. (Technical report).

37. WHITE, A. B. J. On the numerical solution of initial/boundary-value problems in one space dimension. SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 19, n. 4, p. 683–697, 1982. ISSN 00361429. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2157026>.

38. ZEGELING, P. MFE revisited, Part 1: Adaptive Grid-Generation using the Heat Equation. Department of Mathematics, Utrecht University, 1996. Disponível em: <http://igitur-archive.library.uu.nl/math/2001-0703-151147/946.pdf>. Acesso em: 12/06/2013.

39. ZEGELING, P. A. Tensor-product adaptive grids based on coordinate transformations. Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, v. 166, n. 1, p. 343–360, abr. 2004. ISSN 0377-0427. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.018>. Acesso em: 23/04/2013.

40. ZEGELING, P. A. On resistive MHD models with adaptive moving meshes. Journal of Scientific Computing, Plenum Press, New York, NY, USA, v. 24, n. 2, p. 263–284, ago. 2005. ISSN 0885-7474. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-004-4618-6>. Acesso em: 23/04/2013.